



TITLE:

# KdV方程式の由来(流体とプラズマの諸現象の解析)

AUTHOR(S):

鹿野, 忠良

---

CITATION:

鹿野, 忠良. KdV方程式の由来(流体とプラズマの諸現象の解析). 数理解析研究所講究録 1988, 656: 25-50

ISSUE DATE:

1988-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100527>

RIGHT:

## K-dV 方程式の由來

阪大理 鹿野忠良 (Tadayoshi KANO)

§ 1. 序 水面波に対する Friedrichs 展開の数学的正当性を示す事を通して我々は、無次元パラメータに関する asymptotic expansion の  $\mathcal{O}(1)$  項までとった長い水面波の近似方程式として、K-dV 方程式に対する、一つの数学的正当性を示した。これは、Korteweg, de Vries 両名の原の仕事への、偏微分方程式論からのひとつの照明である。

T. KANO - T. NISHIDA, Osaka J. Math. vol. 23,  
1986, pp. 389-413.

(W. Craig, Comm. in PDE, vol. 10, 1985, も参照.)

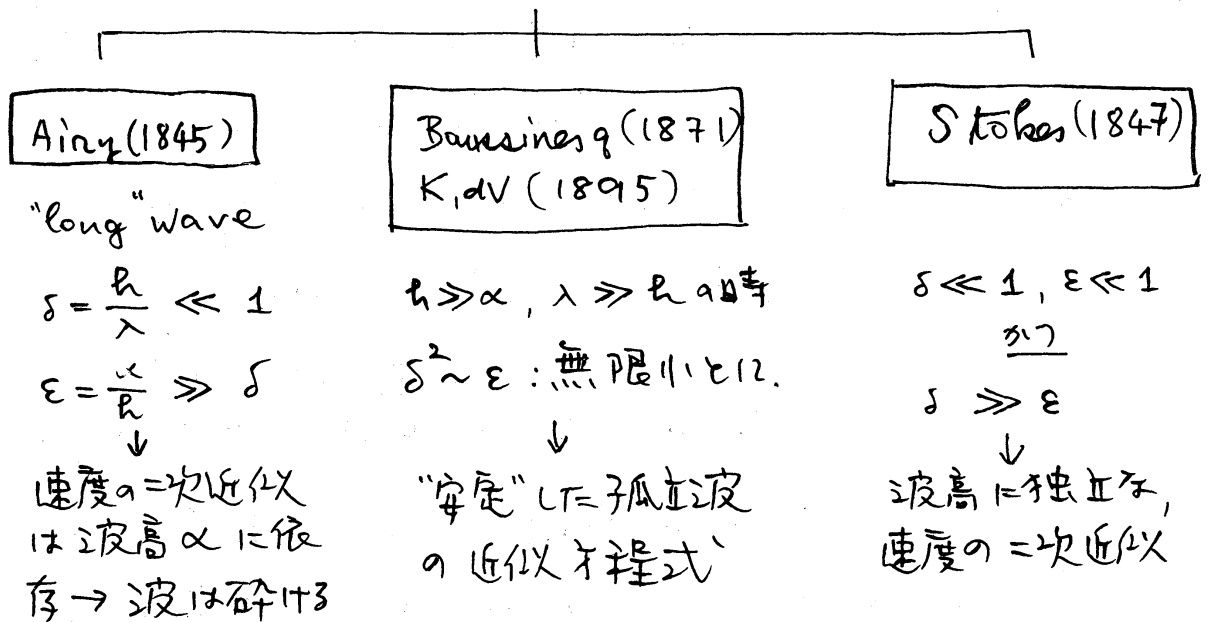
また、三次元流に於る "long waves" を近似する、同じ  $\mathcal{O}(1)$  項までとった (即ち, asymptotic expansion の  $\mathcal{O}(1)$  項までとった) での近似方程式として Kadomtsev-Petviashvili の方程式も得られた:

T. KANO, "Patterns and Waves" (Stud. Math. Appl. vol. 18), 1986, pp. 431-444.

KdV方程式とKP方程式の関係は本質的であり、他方程式（水面波の）に対する上述の我々のasymptotic expansionから、“long waves”（方程式）には、もっと窮められべき構造のあることがわかる。この展開の高次の項の性質をしらべることを通して、この点の若干の解析を試みた。

## §2. 歴史.

1834年, Scott Russell, 孤立波の発見



今、水深:  $h$ , 波長:  $\lambda$ , 波高 (平均水深  $h$  からの水面のズレ):  $\alpha$  ———— として、浅水波方程式 (Airy), 長い水面波の方程式 (Boussinesq, Korteweg-de Vries)

及 Stokes waves の区別と関連を, 歴史的かつ論理的に図式化すると上の様になる (Ursell, 1954)。

以下, 上の図式の数学的な意味づけを正確に行い, KdV 方程式の “今様” の導出をや, こみよう。最後に, その背景をもう少し下り下げ, 表題の問題に迫りたい。

### §3. 無次元 Euler 方程式

$\Phi(t, x, y, z)$  : 速度ポテンシャル

$z - I(t, x, y) = 0$  : 水面.

無次元独立変数:  $(x', y', z'), \lambda(x', y') = (x, y)$

$$h z' = z.$$

$$\frac{\lambda}{c} t' = t, \quad c = \sqrt{gh}, \quad g: \text{重力加速度}.$$

無次元従属変数:  $\{\Phi', I'\}$ ,

$$\Phi = c \lambda \Phi', \quad I = h I'.$$

プライムを落して, 無次元方程式 (水面波) は, 下の様にかける:

$$(3.1) \quad \Delta^2 (\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) + \Phi_{zz} = 0 \quad \text{in } \Omega(t),$$

$$\Omega(t) = \{(x, y, z); (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < z < I(t, x, y)\}, t > 0,$$

$$(3.2) \quad \bar{\Phi}_z = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad z = 0,$$

$$(3.3) \quad \delta^2(\bar{\Phi}_t + \frac{1}{2}(\bar{\Phi}_x^2 + \bar{\Phi}_y^2) + \Gamma) + \frac{1}{2}\bar{\Phi}_z^2 = 0 \quad \left. \vphantom{\delta^2} \right\} z = \Gamma.$$

$$(3.4) \quad \delta^2(\Gamma_t + \Gamma_x \bar{\Phi}_x + \Gamma_y \bar{\Phi}_y) - \bar{\Phi}_z = 0$$

$$\text{初期条件: } \bar{\Phi}(0, x, y, z) = \bar{\Phi}_0(x, y, z)$$

$$\Gamma(0, x, y) = \Gamma_0(x, y) > 0$$

を与えて (3.1) - (3.4) に対する Cauchy 問題を考える。

① 局所存在定理:

解析函数解: Nalimov, Orsjannikov, Shubinot,

Kano-Nishida [J. Math. Kyoto Univ.  
19 (1979)]

滑かな解: Yoshikawa.

②  $C^\infty$  with respect to  $\delta \in [0, 1]$ : 解析函数

解に対し, 存在する局所時間に対して成立 (Kano-

Nishida, "Recent topics in non-linear PDE,

Hiroshima 1983, (Lect. Note Num. Anal. Appl. 6,

1984, Kinokuniya-North Holland), pp. 39-57.

特に, ②によつて, Friedrichs 展開 (Friedrichs,

Comm. Pure Appl. Math., 1 (1948), pp. 81-87) の正当

性が示された: すなわち,  $X_p$  を収束半径  $p$  の解析函数

が生成する Banach 空間とする時, そのスケール:  $S = \bigcup_{p>0} X_p$

に於て、解  $\{\Gamma^\delta, \Phi^\delta\}$  は下の展開をもつ：

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^\delta &\sim \sum_{n \geq 0} \Gamma^n(t, x, y) \delta^{2n} \\ \Phi^\delta &\sim \sum_{n \geq 0} \Phi^n(t, x, y, z) \delta^{2n} \end{aligned} \right\}.$$

Airy の理論は、 $\{\Gamma^0, \Phi^0\}$  がみたす方程式から得られる：

$$\begin{cases} \Gamma_t^0 + (\Gamma^0 \Phi_x^0)_x + (\Gamma^0 \Phi_y^0)_y = 0 \\ \Phi_t^0 + \frac{1}{2}(\Phi_x^0{}^2 + \Phi_y^0{}^2) + \Gamma^0 = 0, \end{cases}$$

これが、浅水波方程式であつて、 $\{\Gamma^0, \Phi_x^0, \Phi_y^0\}$  に関する準線型双曲型方程式である。一般に滑かな大域解は存在しないから、やがて“波は砕ける”のである。

我々は更に、 $\{\Gamma^n, \Phi_x^n, \Phi_y^n\}$  に関する、いわゆる強双曲型方程式系の系列を得る。すなわち、 $(3.1)$  が一様楕円性を失つ  $\delta = 0$  に於て、浅水波は、双曲方程式系の無限列の asymptotic superposition によって表される。尚、Notations については、前頁掲出の Kano-Nishida (1979) を参照。

#### § 4. Konteweg-de Vries 方程式

二次元流の場合を考える:  $\bar{\Phi}_y \equiv 0, \bar{\Gamma}_y \equiv 0$ . 浅水波の場合に考察した  $\delta^2 = (\text{平均水深} / \text{波長})$  の他に,  $\varepsilon = (\text{波高} \alpha / \text{平均水深 } h)$  をも考慮し, 下の様に, 非線型性と分散の間の釣合を考える。すなわち H. Ursell の言う " $\delta^2 \sim \varepsilon$  as infinitesimals for  $\lambda \gg h, h \gg \alpha$ " にあわせて, 簡単のため  $\varepsilon = \delta^2$  とおこう。

この場合の無次元化は下の通り:

$$z = h + z_1 = h + \alpha z_1', \quad z_1': \text{無次元波高.}$$

から

$$z = h z' = h \left(1 + \frac{\alpha}{h} z_1'\right) = h (1 + \varepsilon z_1')$$

$$\text{i.e., } z' = 1 + \varepsilon z_1' = 1 + \delta^2 z_1'.$$

この, 波高の無次元化以外, 独立変数の無次元化は前節までの通りとし, 対応する従属変数の無次元量は, プライムをはづして, 下の様に定義される:

$$\{\psi, \phi\} \text{ by } \begin{cases} \bar{\Phi} = -t + \delta^2 \phi \\ \bar{\Gamma} = 1 + \delta^2 \psi \end{cases}$$

さて, 前節の無次元化方程式 (3.1) - (3.4) を, 上の  $\{\psi, \phi\}$  に対する方程式として書きあらため, 更に,

$$\Phi_z|_{z=\Gamma} \longmapsto \Phi_z|_{z=\Gamma}$$

i.e.

$$\phi_z|_{z=1+\delta^2\gamma} \longmapsto \phi_x = u|_{z=1+\delta^2\gamma}$$

の写像の  $\delta^2$  による展開を用いれば, 水面に於る方程式, すなわち, 他ならぬ水面波の方程式として次を得る:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \gamma_t + u_x + \frac{\delta^2}{3} u_{xxx} + \delta^2 (\gamma u)_x = O(\delta^4) \\ u_t + \gamma_x + \delta^2 u u_x = O(\delta^4) \end{cases}$$

in  $B_p = \left\{ v(z): \Omega_p = \{z = x + iy, x \in \mathbb{R}, |y| < p\} \text{ の正則関数, } \right. \\ \left. \|v\|_p = \|(1+|k|) e^{p|k|} \hat{v}(k)\|_{L^2} < +\infty \right\}, \\ \text{すなわち } \hat{v}(k) \text{ は } v \text{ の Fourier 変換, } \forall p < p_0, \\ \text{for } |t| < a(p_0 - p), \text{ 且, } \{\gamma, u\}(0) \in B_{p_0}.$

さて, (4.1) に与える初期条件が

$$(\gamma + u)(0) = O(1), (\gamma - u)(0) = O(\delta^2) \text{ in } B_{p_0}$$

をみたす時,

$$2g = \gamma - u, \quad 2f = \gamma + u$$

が定義する  $g, f$  が表わす, 一方向に伝播する水面波を考察しよう。



まず次の事に注意する:  $g(0) = O(\delta^2)$ ,  $f(0) = O(1)$   
 in  $B_{p_0}$  であるが,  $t > 0$  に対しても  $g(t) = O(\delta^2)$ ,  
 $f(t) = O(1)$  in  $B_p$ ,  $\forall p < p_0$ ,  $|t| < a(p_0 - p)$   
 が成立つ。実際これは,  $g_t - g_x = O(\delta^2)$ ,  $g(0) = O(\delta^2)$ ;  
 $f_t + f_x = O(1)$ ,  $f(0) = O(1)$ , なるから。

この事に注意すれば (4.1) から,  $g, f$  に対する下の  
 方程式が得られる:

$$(4.2) \quad f_t + f_x + \frac{3}{2} \delta^2 f f_x + \frac{\delta^2}{6} f_{xxx} = O(\delta^4),$$

及

$$(4.3) \quad g_t - g_x - \frac{3}{2} \delta^2 g g_x - \frac{\delta^2}{6} g_{xxx} = \delta^2 \left( -\frac{1}{2} f f_x - \frac{1}{6} f_{xxx} \right) + O(\delta^4),$$

in  $B_p$ ,  $\forall p < p_0$ ,  $|t| < a(p_0 - p)$ .

次に, KdV 方程式

$$\bar{f}_t + \bar{f}_x + \frac{3}{2} \delta^2 \bar{f} \bar{f}_x + \frac{\delta^2}{6} \bar{f}_{xxx} = 0$$

を, 初期条件  $\bar{f}(0) - f(0) = O(\delta^4)$  で与えれば,

$$\| \bar{f}(t) - f(t) \|_p = O(\delta^4)$$

が, 初期値と右辺に関する連続性から従う。更にこの  $\bar{f}$  を

用いて

$$\bar{q}_t - \bar{q}_x - \frac{3}{2} \delta^2 \bar{q} \bar{q}_x - \frac{\delta^2}{6} \bar{q}_{xxx} = \delta^2 \left( -\frac{1}{2} f \bar{f}_x - \frac{1}{6} f_{xxx} \right)$$

を、同じく  $\bigcup_{p>0} B_p$  で解く事が出来ることから、初期条件を  $\bar{q}(0) - q(0) = O(\delta^4)$  にとっておけば、

$$\|\bar{q}(t) - q(t)\|_p = O(\delta^4)$$

が従う。こうして、二次元流の場合に、長い水面波を近似する方程式として、K-dV方程式が、数学的に厳密に導き出された、但、局所時間に対して、“厳密”なのである。

### §5. Kadomtsev-Petviashvili 方程式

再び二次元流に戻る。波長が  $x$ -軸方向と  $y$ -軸方向で異なる時、それ等を夫々  $\lambda, L$  とし、独立変数の無次元化を次の様に行う：

$$(t, x, y, z) = \left( \frac{\lambda}{c} t', \lambda x', L y', R z' \right).$$

更に、“長い波”の条件を次の様に課す：

$$\frac{\alpha}{h} = \varepsilon \sim \delta^2, \quad \frac{h}{\lambda} = \delta, \quad \frac{\lambda}{L} = \delta.$$

さて, 対応する無次元の従属変数で, §4 に於る  $\{\chi, \phi\}$  に相当する  $\{\eta, \psi\}(t, x, y)$  を, 同様に

$$\Phi = -t + \delta^2 \psi, \quad I = 1 + \delta^2 \eta$$

で定義しよう。前節同様の議論によつて, 次の方程式を得る:

$$\begin{cases} \eta_t + \psi_x + \frac{\delta^2}{3} \psi_{xxx} + \delta^2 (\eta \psi)_x + \delta^2 \int_{-y}^x \psi_{yy} dx = O(\delta^4), \\ \psi_t + \eta_x + \delta^2 \psi \psi_x = O(\delta^4) \end{cases}$$

in  $B_\rho$ ,  $\forall \rho < \rho_0$ ,  $|t| < a(\rho_0 - \rho)$ ,  $\{\eta, \psi\}(0) \in B_{\rho_0}$ ,  
ただし  $\psi = \psi_x$ .

初期条件に

$$(\eta + \psi)(0) = O(1), \quad (\eta - \psi)(0) = O(\delta^2) \quad \text{in } B_{\rho_0}$$

を課し,

$$2m = \eta + \psi, \quad 2n = \eta - \psi$$

が定義する  $m, n$  が記述する一方向に伝播する水面波

を考察する。前節同様の理由で  $m(t) = O(1)$ ,  $n(t) = O(\delta^2)$  が従う事より、次の方程式が得られる:

$$\left( m_t + m_x + \frac{3}{2} \delta^2 m m_x + \frac{\delta^2}{6} m_{xxx} \right)_x + \frac{\delta^2}{2} m_{yy} = O(\delta^4),$$

及,

$$\begin{aligned} \left( n_t - n_x - \frac{3}{2} \delta^2 n n_x - \frac{\delta^2}{6} n_{xxx} \right)_x - \frac{\delta^2}{2} n_{yy} = \\ = -\frac{\delta^2}{2} (m m_x)_x - \frac{\delta^2}{6} m_{xxxx} - \frac{\delta^2}{2} m_{yy} + O(\delta^4), \end{aligned}$$

in  $B_\rho$ ,  $\forall \rho < \rho_0$ ,  $|t| < a(\rho_0 - \rho)$ .

すなわち、対応する Kadomtsev-Petviashvili 方程式 (以下、KP 方程式という):

$$\left( M_t + M_x + \frac{3}{2} \delta^2 M M_x + \frac{\delta^2}{6} M_{xxx} \right)_x + \frac{\delta^2}{2} M_{yy} = 0$$

は、 $M(0) \in B_{\rho_0, 2\pi}$ ,  $B_{\rho, 2\pi} = \{u \in B_\rho, x \text{ に関して } 2\pi\text{-périodique}\}$ , したがって、 $M(t) \in B_{\rho, 2\pi}$ ,  $\forall \rho < \rho_0$ ,  $|t| < a(\rho_0 - \rho)$ , なる解をもつ。そこで、初期条件

$$M(0) - m(0) = O(\delta^4) \text{ in } B_{\rho_0, 2\pi}$$

を課すれば、

$$\|M(t) - m(t)\|_{p, 2\pi} = O(\delta^4),$$

を得る。この  $M(t)$  を用いて、非斉次 KP-方程式

$$\begin{aligned} \left( N_t - N_x - \frac{3}{2} \delta^2 N N_x - \frac{\delta^2}{6} N_{xxx} \right)_x - \frac{\delta^2}{2} N_{yy} &= \\ &= -\frac{\delta^2}{2} (M M_x)_x - \frac{\delta^2}{6} M_{xxx} - \frac{\delta^2}{2} M_{yy} + O(\delta^4) \end{aligned}$$

$$N(0) - n(0) = O(\delta^4)$$

を  $\bigcup_{p>0} B_{p, 2\pi}$  で解けば、

$$\|N(t) - n(t)\|_{p, 2\pi} = O(\delta^4)$$

を得、かくて、三次元流に於て長い水面波を近似する方程式として、KP-方程式が（数学的に厳密に）みちびき出された。

### 《 中間的総括 》

二次元流に対しても、三次元流に対しても、長い水面波に対する一次近似は、所謂線型波動方程式であてえられる。無限小振幅の場合に Lagrange が与えたこの一次近似は、有限振幅の場合にも正しい事、§§ 3-4 に述べた我々の議

論から従う (前掲 Osaka J. Math., 23 (1986) を見られたい)。

さて我々は, §§ 3-4 に於て, 有限振幅の長い水面波の近似方程式として, 二次近似に於ては,

二次元流 — KdV 方程式,

三次元流 — KP 方程式

が得られる事を知った。元來 KP-方程式が, 二次元の完全積分可能系として KdV 方程式から "構成" されたという由來を考える時, 上の結果を予想外の暗合といってしまうことは出来ない様に思えるのである。

## § 6. 試みの一太刀

本節では, 長い水面波に対する (Friedrichs) 展開を高次まですゝめる事によって, Soliton 方程式系 (KdV hierarchy) との交差を示す long waves equation の一相貌を垣間みることにしたい。本節は, E. DATE, T. NISHIDA との討論に支えられている。しかし, 水面波の研究上, この側面に深入りしすぎる事には T. NISHIDA は批判をもっている事実

もある。本稿で述べる結果が中途半端で弱いこともあり、  
当講究録の本稿に実するかぎり、—— positive な要素があ  
る場合を除き —— 全この誤、弱点は、当然ながら、挙げて  
KANO の責に帰するものである事を明記しておきたい。

5.1 後に述べる様に、 $g$ , 従って  $f$ , に対する初期値の  
クラスを狭めていく事によって、求める次数まで  $\delta^2$  に実す  
る方程式の展開を得ることが出来る。今、それが得られた  
時刻がわかるかを一瞥しよう。

$\delta^4$  に於て考察した長い波が、定常流  $\phi_1 = \omega x$ ,  $\omega$   
は定数、に乗っている場合を扱おう。この時は、

$$\Phi = -t + \omega x + \delta^2 \phi$$

$$I = 1 + \delta^2 \gamma$$

として、(4.1) に相当する次の方程式 (の展開) を得る、但、  
 $O(\delta^4)$  迄展開してある：

$$f_t + (\omega + 1)f_x + \delta^2 \left( \frac{3}{2} f f_x + \frac{1}{6} f_{xxx} \right) + \\ + \delta^4 \left( f f_{xxx} + 2 f_x f_{xx} + \frac{2}{15} f_{xxxx} \right) = O(\delta^6)$$

in  $B_\rho$ ,  $\forall \rho < \rho_0$ ,  $|t| < a(\rho_0 - \rho)$ .

さて, Friedrichs 展開によつて  $f$  は次の表現をもつ:

$$f = f^0(t, x) + \delta^2 f^1(t, x) + \delta^4 f^2(t, x) + \delta^6 f^3(t, x) + O(\delta^8),$$

但,  $\{f^j(t, x)\}_{j=0,1,2,\dots}$  は  $\delta$  に独立. 従つて, この展開の係数が次をみたす事がわかる:

$$f_t^0 + (\omega + 1) f_x^0 = 0$$

$$f_t^1 + (\omega + 1) f_x^1 = -\left(\frac{3}{2} f^0 f_x^0 + \frac{1}{6} f_{xxx}^0\right)$$

$$f_t^2 + (\omega + 1) f_x^2 = -\left(\frac{3}{2} (f^0 f^1)_x + \frac{1}{6} f_{xxx}^1\right) - (f^0 f_{xxx}^0 + 2 f_x^0 f_{xx}^0 + \frac{2}{15} f_{xxxx}^0),$$

et ainsi de suite.

従つて,  $B_{p_0}$  の元を一つとつて, 速度  $\omega + 1$  の進行波をつくれば, それを  $f^0$  として得る事が出来, それをもとに, 上の線型波動方程式を逐次解く事によつて,  $f^1, f^2, \dots$  を得る事が出来る. これらによつて

$$\bar{f} = f^0 + \delta^2 f^1 + \delta^4 f^2$$



を,  $O(\delta^6)$  を誤差とする  $f$  の近似解として得る。

特に,  $f^0$  として KdV 方程式の Solitary wave solution

$$u = \frac{4}{3} \beta^2 \operatorname{sech}^2(kx - \beta t + \gamma_0), \quad \beta = 4k^3,$$

をとれば,  $\omega = 4k^2 - 1$  に対して

$$f_t^0 + 4k^2 f_x^0 = 0$$

であり,

$$f_t^1 + 4k^2 f_x^1 = -\frac{1}{9} u_t$$

$$f_t^2 + 4k^2 f_x^2 = -\left(\frac{3}{2} (f^0 f^1)_x + \frac{1}{6} f_{xxx}^1\right) - \\ - (f^0 f_{xxx}^0 + 2 f_x^0 f_{xx}^0 + \frac{2}{15} f_{xxxx}^0)$$

を解いて, KdV 方程式の Solitary wave solution による,  $O(\delta^6)$  を誤差とする Long waves of water surface の近似解を得る。

次に, 同様の考察によつて, 高次 KdV 方程式 (ここでは, 5階 KdV 方程式) の Solitary wave (solution)

から構成される long wave of water surface の近似解を与えよう。

5階 KdV 方程式

$$U_t + 120 U^2 U_x + 20 U U_{xxx} + 40 U_x U_{xx} + U_{xxxxx} = 0$$

が soliton solution をもつ [Satsuma-Kaup, J. Phys. Soc. Japan, 43 (1977), pp. 692-697] 事から,

$$\frac{1}{15} f_t^\circ + \frac{9}{4} (f^\circ)^2 f_x^\circ + f^\circ f_{xxx}^\circ + 2 f_x^\circ f_{xx}^\circ + \frac{2}{15} f_{xxxxx}^\circ = 0$$

が, soliton  $f^\circ = \frac{8}{3} v$  を解にもつ。この  $f^\circ$  の速度に合わせて  $\omega$  を定め, それを  $\omega^\circ$  とすれば, この  $f^\circ$  は

$$f_t^\circ + (\omega^\circ + 1) f_x^\circ = 0$$

をみたす。

次に, この  $f^\circ$  から  $f^1$  を, 従って  $f^2$  をも, 定めれば (前と同様の方法で), 結局, 定常流  $\phi_1 = \omega x$  に束せた長い水面波のうちに, 5階 KdV 方程式の solitary wave solution によって近似されるものがある事になるのである。

### 《 注意 》

上の議論は“必然性”に乏しく, long waves of water surface と “higher KdV equations” とが, どうかかわりあうのか, あるいは, KdV が方程式が持つ関係に比してどれ程かけはなれているのかを見るためには, 解析としては軟弱なものである。水面波方程式に対する変分原理からのアプローチを含めた, もっと精しい解析の結果を, 別途公表したい。

### 5.2 高次の展開.

まず,

$$G(t, x) = g_t - (\omega - 1)g_x - \frac{3}{2}\delta^2 g g_x - \frac{\delta^2}{6} g_{xxx}$$

が,

$$G_t(t) + (\omega + 1)G_x(t) = O(\delta^4)$$

をみたす事を注意する。

もっと一般に,  $G^1(t)$ ,  $G^2(t)$ ,  $\dots$  を次の様に定義する:

$$G^1(t) = G_t(t) + G_x(t)$$

$$G^2(t) = G_t^1(t) + G_x^1(t), \dots,$$

そうすると、これ等は次をみる:

$$G_t^1(t) + (\omega+1)G_x^1(t) = O(\delta^6)$$

$$G_t^2(t) + (\omega+1)G_x^2(t) = O(\delta^8), \dots.$$

それは、(4.3)の右辺をみる時、

$$f_t + (\omega+1)f_x + \frac{3}{2}\delta^2 f f_x + \frac{\delta^2}{6} f_{xxx} = O(\delta^4),$$

また、

$$F^1 = 3 f f_x + \frac{1}{3} f_{xxx}$$

$$F^2 = \frac{3}{2} (f F^1)_x + \frac{1}{3} F^1_{xxx}$$

$$F^3 = \frac{3}{2} (f F^2)_x + \frac{1}{3} F^2_{xxx}, \dots,$$

が、

$$F_t^j + (\omega+1)F_x^j + \frac{3}{2}\delta^2 (f F^j)_x + \frac{\delta^2}{6} F^j_{xxx} = O(\delta^4),$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

を,  $F^1(0) = O(\delta^4)$  の条件下で, みたす事からわかる。特に,  $f \mapsto F^1, F^1 \mapsto F^2, \dots$ , と定義していく過程は, 所謂 KdV hierarchy の漸化式に相当するものと見做され, (4.3) の右辺の  $=$  項,  $\delta^4$  の係数, は, およそ,  $(fF^1)_x$  から得られる, 等の事実注目する。

さて, いよいよ, 方程式の, (4.2), (4.3) より高次の展開を考える事になる。我々はさらに,

$$g(0) = O(\delta^2) \text{ in } B_{p_0} \Rightarrow g(t) = O(\delta^2) \text{ in } B_p,$$

$\forall p < p_0, |t| < a(p_0 - p)$ , を注意した。

次に,

$$g(0) = O(\delta^4), G(0) = O(\delta^4) \text{ in } B_{p_0},$$

を課し, 初期条件を“狭く”する。そうすると

$$G_t(t) + (\omega + 1) G_x(t) = O(\delta^4)$$

から  $G(t) = O(\delta^4), |t| < a(p_0 - p), \text{ in } B_p,$   
 $\forall p < p_0$ , が従う。これより従って,  $g(0) = O(\delta^4)$   
 を用いる事によつて, 結局  $g(t) = O(\delta^4)$  が従う事である。

同様に,

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= O(\delta^6), \quad G(0) = O(\delta^6) \\ G^1(0) &= G_t(0) + G_x(0) = O(\delta^6) \end{aligned} \right\}$$

を与えれば,

$$G_t^1(t) + (\omega + 1)G_x^1(t) = O(\delta^6)$$

から

$$G^1(t) = O(\delta^6), \text{ i.e. } G_t(t) + G_x(t) = O(\delta^6)$$

が従い, よって  $G(0) = O(\delta^6)$  を用いて,  $G(t) = O(\delta^6)$ ,  
 そして結局,  $g(0) = O(\delta^6)$  より,  $g(t) = O(\delta^6)$ ,  
 in  $B_p$ ,  $\forall p < p_0$ ,  $|t| < a(p_0 - p)$ , を得る, 等々。

この様にして,  $g$  に対する初期値のクラスを順次せよ  
 めていかねければならぬにせよ, そうすれば,  $g(t)$  と  
 して,  $\delta^2$  に関する高次オーダーの解を, 次々得る事が出  
 来る。そして, それに応じて  $f$  に対する高次の展開也得  
 られるのである。

ここでは  $O(\delta^8)$  までの表示にとどめるが, 具体的に  
 高次の展開を計算するのは, いさゝか面倒な手続である:

$$\begin{aligned}
& f_t + (\omega + 1)f_x + \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{3}{2} f^2 + \frac{1}{6} f_{xxx} \right)_x + \\
& + \frac{\delta^4}{2} \left( f f_{xx} + \frac{1}{2} f_x^2 + \frac{2}{15} f_{xxxx} \right)_x + \\
& + \frac{\delta^6}{2} \left( f^2 f_{xx} + f f_x^2 + \frac{2}{3} f f_{xxx} + \frac{4}{3} f_x f_{xxx} + \right. \\
& \quad \left. + f_{xx}^2 + \frac{17}{315} \frac{\partial^6 f}{\partial x^6} \right)_x + \\
& + \frac{\delta^8}{2} \left( \frac{1}{3} f^3 f_{xx} + \frac{1}{2} f^2 f_x^2 + \frac{4}{3} f^2 f_{xxx} + \right. \\
& \quad + \frac{16}{3} f f_x f_{xxx} + 2 f_x^2 f_{xx} + 4 f f_{xx}^2 + \\
& \quad + \frac{17}{45} f \frac{\partial^6 f}{\partial x^6} + \frac{17}{15} f_x \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \frac{7}{3} f_{xx} f_{xxxx} + \\
& \quad \left. + \frac{25}{18} f_{xxx}^2 + \frac{62}{2835} \frac{\partial^8 f}{\partial x^8} \right)_x = O(\delta^{10}).
\end{aligned}$$

この展開は、E.DATe の協力で、数式処理システム・REDUCE 3.3 を用いて、システムティックに計算する事が出来る。

我々のオートの observation は、上の展開の  $O(\delta^{2n})$  の係数が、 $(2n+1)$  階 KdV 方程式の flux から  $f^{n+1}$  が欠けたものになっている様だということである；  $n \geq 2$ 。

もし  $n \geq 5$  についてもその様な関係があるとしても、この事から直ちに、long waves of water surface の構造が所謂 KdV hierarchy と本質的に関係しているのかどうかはわからない。あるいは、T. NISHIDA が言うとうり、“似ていても、ちがうものはちがう”のかも知れない。

当面、今一步解析を深めて、ちがうものであれば、“どこちがうか、その際、 $n=1$  に於ては、ピッタリ KdV 方程式の flux が得られる事の意味は何か...”等を考えたい。

### 5.3 初期条件のクラス

前小節で  $q(0) = O(\delta^4)$  の他に

$$G(0) = (q_t - (\omega - 1)q_x - \frac{3}{2}\delta^2 q q_x - \frac{\delta^2}{6} q_{xxx})(0) = O(\delta^4)$$

を条件として課すると述べた。この事は、しかし、当然にも  $f(0)$  に対する条件を induce する。実際 (4.3) の高次展開をみれば、

$$(ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx})(0) = O(\delta^2)$$

が要請される。



更に,

$$g(0) = O(\delta^6), \quad G(0) = O(\delta^6), \quad G'(0) = O(\delta^6)$$

からは,

$$(ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx})(0) = O(\delta^4)$$

$$(3ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx})(0) = O(\delta^2)$$

$$(ff_{xxx} + 4f_x f_{xx} + \frac{2}{15}f_{xxxx})(0) = O(\delta^2)$$

等。

前2小節の議論の成功のためには, これ等を consistent に与えなければならないが, たとえば極端に,

$$u \in B_p. \quad \text{から} \quad \tilde{u}(x) = u(\delta^4 x) \in B_p.$$

をつくれば,  $f(0) = \tilde{u}(x)$  と与える事によって, この要請を実現する事が出来る。実際,  $\tilde{u}(x) = O(1)$  ( $\delta$  に関し2)であり,  $\tilde{u}_x = \delta^4 u'(\delta^4 x)$  である。また,  $u \in B_p$  に対して  $\tilde{u}(x) = u(\delta^4 x)$  は, 収束半径が広げられているから,  $B_p$  に属する事, 明らかである。特に, 目下考察している展開は,  $\delta > 0$  に対するものである事に注意しよう。

こう極端なことをせずに, optimal な  $f(0)$  のクラスの考察を含め, もっと明解な議論は後日にゆずりたい。

本稿は, そういう様々な留保付の, 中間報告である。

以上

(B付) 補註と正誤

① 4頁, ↓10行目: 「滑かな解: Nalimov, Yoshihara」が正しい。

② 20頁, ↓1~5行目: KdV hierarchy の漸化式と  $F^i \mapsto F^{i+1}$  の定義とは, 同じものではない。また,  $O(\delta^4)$  の係数は, およそ

$$\frac{3}{2} f F^1 + \frac{1}{3} F^1_{xx}$$

から得られる。“およそ”という意味は, 上式は  $f^3$  ( $f \equiv \text{重}$ ) を含むからである。しかし,  $f^3$  自体も,  $F^i$  同様に,  $\text{mod } O(\delta^4)$  で, 線型化 KdV 方程式をみたすのである。

③ 22頁, ↓1行目:

$$f_{t+(\omega+1)} f_x + \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{3}{2} f^2 + \frac{1}{3} f_{xx} \right)_x + \dots$$

が正しい。

④ 22頁, ↑5行目: REDUCE 3.3, は “REDUCE 3.2” が正しい。